1　πが無理数であることの証明

補題 1.1.　任意の正の実数 a に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

証明.　m, n を自然数とする．$n>m>2a$ (例えば $m=[2a]+1$ とする) ならば

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\to 0\qquad(n\to\infty)$$

□

定理 1.2.　π は無理数である．

証明.　I. Niven による，背理法による証明．π が有理数であると仮定して矛盾を導く．
　p と n を任意の自然数として

$$f(x)=\frac{1}{n!}p^nx^n(\pi-x)^n \tag{1}$$

とおき，積分

$$\int_0^\pi \sin x\, f(x)\,dx$$

を考える．$0<x<\pi$ のとき $0<x(\pi-x)<\pi^2$，したがって

$$0<\sin x\, p^nx^n(\pi-x)^n<p^n\pi^{2n}$$

であるから，各辺 x について 0 から π まで積分すると

$$0<\int_0^\pi \sin x\, f(x)\,dx<\frac{1}{n!}(p\pi^2)^n\pi$$

となる．補題 1.1 より，任意の正の実数 a に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

であるから，p に対して n を十分大きくとれば

$$0<\int_0^\pi \sin x\, f(x)dx<1 \tag{2}$$

　次に，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x\, f(x)\,dx&=\Big[-\cos x\, f(x)\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x\, f'(x)\,dx\\&=f(\pi)+f(0)+\int_0^\pi \cos x f'(x)\,dx,\\ \int_0^\pi \cos x\, f'(x)\,dx&=\Big[\sin x f'(x)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\, f'(x)\,dx\\&=-\int_0^\pi \sin x\, f''(x)\,dx\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^\pi \sin x\, f(x)\,dx=f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi \sin x\, f''(x)\,dx$$

この部分積分を繰り返せば，$f^{(2n+2)}(x)=0$ であるから

$$\int_0^{\pi}\sin x\,f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(\pi)+f^{(2k)}(0))$$

を得る．$f(\pi-x)=f(x)$ であるから，合成関数の微分法により

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k f^{(k)}(\pi-x)$$

であり，とくに $f^{(2k)}(\pi)=f^{(2k)}(0)$ である．ゆえに

$$\int_0^{\pi}\sin x\,f(x)\,dx=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0) \tag{3}$$

(1) の右辺の $(\pi-x)^n$ を二項定理を用いて展開すれば

$$f(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^n\pi^{n-k}x^{n+k}$$

したがって

$$\begin{aligned}&f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,\\&f^{(n+k)}(0)=(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{n!}p^n\pi^{n-k}\end{aligned} \tag{4}$$

　ここで仮に π が有理数であったとする．$\pi>0$ なので

$$\pi=\frac{q}{p},\qquad p,\,q\ \text{は自然数}$$

と表せる．(1) の p は任意であったから π の分母の p と同じであるとしてよい．そうすれば

$$p^n\pi^{n-k}=p^kq^{n-k}$$

は整数となるから，(4) により $f^{(k)}(0)$ はすべて整数である．したがって (3) により $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,f(x)\,dx$ は整数となって (2) に矛盾する．□