1 πが超越数であることの証明

補題 1.1. 任意の正の実数 a に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

証明. m, n を自然数とする．$n > m > 2a$ (例えば $m = [2a] + 1$ とする) ならば

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

□

補題 1.2 (Hermite の不等式). 複素数係数の多項式

$$f(X)=\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{n!}X^n$$

に対して

$$F(X)=\sum_{n=0}^{m}f^{(n)}(X), \qquad \overline{f}(X)=\sum_{n=0}^{m}\frac{|a_n|}{n!}|X|^n$$

とおく．このとき，任意の複素数 x に対して

$$|F(x)-F(0)e^x|\le|x|e^{|x|}\overline{f}(x)$$

が成り立つ．

証明.

$$\begin{aligned}
F(0)&=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_m,\\
F(X)&=\sum_{r=0}^{m}f^{(r)}(X)\\
&=\sum_{r=0}^{m}\sum_{n=r}^{m}\frac{a_n}{(n-r)!}X^{n-r}\\
&=\sum_{n=0}^{m}\sum_{r=0}^{n}\frac{a_n}{(n-r)!}X^{n-r}\\
&=\sum_{n=0}^{m}a_n\sum_{r=0}^{n}\frac{X^r}{r!}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
|F(x)-e^xF(0)|&=\left|\sum_{n=0}^{m}a_n\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\right|\\
&\le\sum_{n=0}^{m}|a_n|\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{|x|^r}{r!}\\
&=\sum_{n=0}^{m}\frac{|a_n||x|^{n+1}}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|x|^r}{(n+1)\cdots(n+r+1)}\\
&\le\sum_{n=0}^{m}\frac{|a_n||x|^{n+1}}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|x|^r}{r!}\\
&=|x|e^{|x|}\overline{f}(x)
\end{aligned}$$

□

定理 1.3 (Lindemann). π は超越数である．

証明. π が代数的数であると仮定する．そこで π が整係数の多項式

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n X^n = 0, \qquad a_0 a_n \neq 0$$

の根であるとする．

π が代数的数であれば，$\pi\sqrt{-1}$ も代数的数である．実際，$\beta = \pi\sqrt{-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1 \frac{\beta}{\sqrt{-1}} + a_2 \left(\frac{\beta}{\sqrt{-1}}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{\beta}{\sqrt{-1}}\right)^n \\ &= (a_0 - a_2\beta^2 + a_4\beta^4 - \cdots) - \sqrt{-1}(a_1\beta - a_3\beta^3 + a_5\beta^5 - \cdots) \end{aligned}$$

絶対値をとると

$$(a_0 - a_2\beta^2 + a_4\beta^4 - \cdots)^2 + (a_1\beta - a_3\beta^3 + a_5\beta^5 - \cdots)^2 = 0$$

ゆえに β は代数的数である．

そこで $\pi\sqrt{-1}$ の次数 (すなわち $\pi\sqrt{-1}$ を根とする最小多項式の次数) を m とし，$\pi\sqrt{-1}$ の共役を $\alpha_1\,(= \pi\sqrt{-1}), \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ とする．Euler の公式により

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = \cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi = -1$$

であるから，$1 + e^{\alpha_1} = 0$．よって

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_m}) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i} + \sum_{i<j} e^{\alpha_i + \alpha_j} + \cdots + e^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m} \end{aligned}$$

である．このとき，$\alpha_i, \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ の中で 0 になるものの個数を $q - 1$ とし (このような正の整数 q をとる)，そうでないものの個数を l とする．上の式は

(1) $$q + \sum_{j=1}^{l} e^{y_j} = 0$$

なる形で書ける．このとき各 y_j について $e^{y_j} \neq 0$ であり，$y_1, y_2, \ldots, y_l$ の対称式はすべて $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ の対称式である．$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ の対称式は有理数であるから，$y_1, y_2, \ldots, y_l$ の対称式も有理数である．よって $(X - y_1)(X - y_2) \cdots (X - y_n)$ は有理数係数の多項式になるから，整数 $c_0, c_1, \ldots, c_l$ によって

$$c_0(X - y_1)(X - y_2) \cdots (X - y_n) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_l X^l$$

となる．

さて，p を $q, |c_0|, |c_l|$ よりも大きい素数とし

(2) $$f(X) = \frac{1}{(p-1)!} c_l^{lp-1} X^{p-1} (c_0 + c_1 X + \cdots + c_l X^l)^p$$

とおく．$f(X)$ は有理数係数の多項式である．また

$$\begin{aligned}
F(X) &= f(X) + f'(X) + \cdots + f^{(\deg f)}(X), \\
\overline{f}(X) &= \frac{1}{(p-1)!}|c_l|^{lp-1}X^{p-1}(|c_0| + |c_1|X + \cdots + |c_l|X^l)^p
\end{aligned}$$

とする．ただし $\deg f$ は多項式 f の次数である．

$$S = qF(0) + \sum_{j=1}^{l} F(y_j)$$

とおくと，(1) および Hermite の不等式から

$$\begin{aligned}
|S| &= \left| \sum_{j=1}^{l} (F(y_j) - e^{y_j}F(0)) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{l} |F(y_j) - e^{y_j}F(0)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{l} |y_j| e^{y_j} \overline{f}(y_j)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$M = \max\{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ とすると

$$\sum_{j=1}^{l} |y_j| e^{y_j} \overline{f}(y_j) \leq lMe^M \overline{f}(M)$$

となる．一方，任意の正の実数 a に対して $a^p/p! \to 0$ $(p \to \infty)$ であるから，p を大きくとるほど

$$lMe^M \overline{f}(M) \leq \frac{CK^p}{(p-1)!}$$

の右辺はいくらでも 0 に近づく．ここで

$$C = le^M|C_l|, \qquad K = |C_l|^l M(|c_0| + |c_1|M + \cdots + |c_l|M^l)$$

である．したがって，十分大きな素数 p を 1 つとって

$$|c_0 S| < 1 \tag{3}$$

とできる．

次に，(2) から

$$\begin{aligned}
&f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0, \\
&f^{(p-1)}(0) = c_l^{lp-1}c_0^p, \\
&f^{(k)}(0) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (k \geq p)
\end{aligned}$$

さらに

$$f(X) = \frac{1}{(p-1)!}(c_l X)^{p-1}(c_l X - c_l y_1)^p (c_l X - c_l y_2)^p \cdots (c_l X - c_l y_l)^p$$

このとき $j = 1, 2, \ldots, l$ に対して

$$f(y_j) = f'(y_j) = \cdots = f^{(p-1)}(y_j) = 0$$

かつ，ある整係数の多項式 $g_{j,k}(X_1, \ldots, X_l)$ が存在して

$$f^{(k)}(y_j) = p \cdot g_{j,k}(y_1, \ldots, y_l) \qquad (k \geq p)$$

と表せる．$f(X)$ は $y_1, y_2, \ldots, y_l$ について対称だから，各 k について

$$\sum_{j=1}^{l} f^{(k)}(y_j) = p \sum_{j=1}^{l} g_{j,k}(y_1, \ldots, y_l)$$

は $y_1, y_2, \ldots, y_l$ についての対称式になる．よって $y_1, y_2, \ldots, y_l$ のある対称式 $h(y_1, \ldots, y_l)$ により

$$c_0 \sum_{j=1}^{l} F(y_j) = c_0 \sum_{k=1}^{\deg f} \sum_{j=1}^{l} f^{(k)}(y_j) = p \cdot c_0 \cdot h(y_1, \ldots, y_l)$$

c_0 の取り方からわかるように $c_0 \cdot h(y_1, \ldots, y_l)$ は整数である．よって

$$c_0 S = c_0 q F(0) + c_0 \sum_{j=1}^{l} F(y_j) \equiv c_l^{lp-1} c_0^{p+1} \pmod p$$

素数 p の取り方から $c_l^{lp-1} c_0^{p+1}$ は p で割りきれない．ゆえに $|c_0 S|$ は 0 でない整数である．ところがこのことは (3) に反する．したがって π は超越数でなければならない． $\square$