

1 三辺が整数である直角三角形の面積は平方数にはならないことの証明

命題 1.1. 直角三角形の三辺が整数のとき、その面積は平方数にはならない。

証明. 面積が平方数であるような直角三角形のうちで、面積において最小のものが存在する。そのような直角三角形の三辺を a, b, c とおき、面積を S とする。 S は

$$S = \frac{1}{2}ab$$

で与えられる。

a, b, c は二つずつ互いに素である。なぜなら、 a, b が公約数 $d > 1$ をもつとすると、 $a/d, b/d, c/d$ を三辺とする直角三角形は S より小さい平方数 S/d^2 の面積をもち、 S の最小性に反する。それ以外の場合についても同様である。そこで a を奇数、 b を偶数とすると、ある自然数 d, e によって

$$a = d^2 - e^2, \quad b = 2de$$

と書ける。したがって

$$S = de(d+e)(d-e)$$

となる。 $d, e, d+e, d-e$ は互いに素であるから、それぞれが平方数になる。よって

$$d = f^2, \quad e = g^2, \quad d+e = h^2, \quad d-e = i^2 \quad (f, g, h, i \in \mathbb{N})$$

と書ける。

$$(h-i)(h+i) = h^2 - i^2 = 2e = 2g^2$$

であるから、 $h-i, h+i$ の少なくとも一方は偶数である。よって両方とも偶数である。 h, i は互いに素だから $h-i, h+i$ の最大公約数は 2 のべきである。したがって $h-i, h+i$ のうち一方が平方数かつ偶数で、もう一方が平方数の 2 倍である。すなわち

$$\begin{cases} h+i = 2j^2 \\ h-i = 4k^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} h+i = 4k^2 \\ h-i = 2j^2 \end{cases} \quad (j, k \in \mathbb{N})$$

と書ける。よって

$$h = j^2 + 2k^2, \quad i = \pm(j^2 - 2k^2) \quad (j, k \in \mathbb{N})$$

と書ける。

さて

$$d = \frac{1}{2}(h^2 + i^2) = j^4 + 4k^4$$

であり、一方、 $d = f^2$ だから

$$f^2 = (j^2)^2 + (2k^2)^2$$

となる。したがって $j^2, 2k^2, f$ がある直角三角形の三辺の長さとなり、その直角三角形の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2}j^2 \cdot 2k^2 = (jk)^2$$

で与えられる。 S' は平方数である。しかも、 $d = j^4 + 4k^4, e = 4j^2k^2$ であるから

$$S' < de < S$$

である。これは S の最小性に反する。

□