1　位相群

集合 G が次の条件を満たしているとき，G は**位相群**をなすという：

(1)　G は群をなす.

(2)　G は位相空間をなす.

(3)　2 つの写像

$$\phi : G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto xy$$

$$\psi : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto x^{-1}$$

はともに連続である．ただし，$G \times G$ には直積位相が入る．

注意 1.1 (写像の連続性について復習)． X_1, X_2 を位相空間とし，f を X_1 から X_2 への写像とする．f が連続であるとは，X_2 の任意の開集合 U について，$f^{-1}(U)$ が X_1 の開集合であるときにいう．このことは，次の条件と同値である：x を X_1 の元とし，U を X_2 の開集合とする．このとき

$$f(x) \in U$$

ならば，X_1 のある開集合 U_1 が存在して

$$x \in U_1, \quad f(U_1) \subseteq U$$

が成り立つ．

証明． f が 1 番目の条件を満たすならば，U_1 として $f^{-1}(U)$ をとることによって f は 2 番目の条件を満たす．逆に，f が 2 番目の条件を満たしているならば

$$x \in f^{-1}(U) \Longrightarrow f(x) \in U \Longrightarrow x \in U_1$$

なので，$f^{-1}(U) \subseteq U_1$ が成り立つ．一方

$$f(U_1) \subseteq U \Longrightarrow U_1 \subseteq f^{-1}f(U_1) \subseteq f^{-1}(U)$$

であるから，$U_1 \subseteq f^{-1}(U)$，したがって $U_1 = f^{-1}(U)$ である． □

例 1.2． 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，加法群として考えたとき，通常の位相によって位相群をなす．また，$\mathbb{R}$ を体と考えたとき，乗法群 $\mathbb{R}^\times$ も通常の位相によって位相群をなす．さらに $\mathbb{R}^\times$ の部分群 $R^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ も通常の位相によって位相群をなす.

例 1.3． $\mathbb{R}$ を実数全体からなる位相加法群とする．このとき $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ 自身への連続な準同型写像は，ある $a \in \mathbb{R}$ によって $f(x) = ax$ と表される．

証明． $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続な準同型写像とする．$f(1) = a$ とおくと，f が準同型写像であることから

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}a \quad (\forall m, \forall n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0)$$

が成り立つ．実際

$$mf\left(\frac{n}{m}\right) = f(n) = nf(1) = na \qquad \therefore f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}a$$

である．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，x に収束する有理数列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するから，f の連続性により

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} ar_n = ax$$

となる． □

命題 1.4. 位相群であるための条件 (3) は，次の 2 つの条件が成り立つことと同値である：

(*a*) U を G の開集合，x, y を G の元とする．このとき

$$xy \in U$$

ならば，G のある開集合 V, W が存在して

$$x \in V, \quad y \in W, \quad VW \subseteq U$$

が成り立つ．

(*b*) U を G の開集合，x を G の元する．このとき

$$x^{-1} \in U$$

ならば，G のある開集合 V が存在して

$$x \in V, \quad V^{-1} \subseteq U$$

が成り立つ．

証明. (3) の積の写像 ϕ が連続であることは，次のように言い換えられる：G の開集合 U と G の 2 つの元 x, y について

$$xy \in U$$

ならば，$G \times G$ のある開集合 U が存在して

$$(x, y) \in U_1, \quad \phi(U_1) \subseteq U$$

が成り立つ．

さて，直積位相の定義から U_1 は

$$U_1 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (O_{1,\lambda} \times O_{2,\lambda})$$

という形に，G のある開集合 $O_{1,\lambda}, O_{2,\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$ によって書ける．よって，(x, y) が U_1 の元ならば，Λ のある元 μ が存在して

$$(x, y) \in O_{1,\mu} \times O_{2,\mu}$$

そこで，$V = O_{1,\mu}, W = O_{2,\mu}$ とおくことにより

$$x \in V, \quad y \in W$$

が成り立ち，さらに

$$VW = \phi(V \times W) \subseteq \phi(U_1) \subseteq U$$

がいえる．

逆に，条件 (a) が成り立っていれば，U_1 として $V \times W$ をとれば，(3) の積の写像 ϕ の連続性を言い換えた条件が成り立つ．

次に，(3) の逆元の写像 ψ が連続であることは

$$\psi(x) = x^{-1}, \quad \psi(V) = V^{-1}$$

に注意すれば直ちに (b) のように言い換えることができる． □

命題 1.5. 位相群であるための条件 (3) は，次の条件が成り立つことと同値である：U を G の開集合，x, y を G の元とする．このとき

$$xy^{-1} \in U$$

ならば，G のある開集合 V, W が存在して

$$x \in V, \quad y \in W, \quad VW^{-1} \subseteq U$$

が成り立つ．

証明. まず，位相群の条件 (3) が成り立つと仮定して，この命題の主張を示す．G の開集合 U と G の 2 つの元 x, y について

$$xy^{-1} \in U$$

が成り立っているとする．命題 1.4(a) より，G のある開集合 V, W_1 が存在して

$$x \in V, \quad y^{-1} \in W, \quad VW_1 \subseteq U$$

命題 1.4(b) より，G のある開集合 W が存在して

$$y \in W, \quad W^{-1} \subseteq W_1$$

が成り立つ．よって

$$x \in V, \quad y \in W, \quad VW^{-1} \subseteq U$$

である．

次に，この命題の条件から命題 1.4(b) を導く．e を G における単位元とする．G の開集合 U と G の元 x について

$$x^{-1} \in U$$

が成り立っているとする．$x^{-1} = ex^{-1}$ に注意すれば，G のある開集合 V, W が存在して

$$e \in V, \quad x \in W, \quad VW^{-1} \subseteq U$$

$e \in V$ なので，$W^{-1} \subseteq VW^{-1}$ である．したがって命題 1.4(b) が成り立つ．

最後に，この命題の条件から命題 1.4(a) を導く．G の開集合 U と G の 2 つの元 x, y について

$$xy \in U$$

とする．$xy = x(y^{-1})^{-1}$ に注意すれば，G のある開集合 V, W_1 が存在して

$$x \in V, \quad y^{-1} \in W_1, \quad VW_1^{-1} \subseteq U$$

先に命題 1.4(b) を証明したので，それを使うと，G のある開集合 W が存在して

$$y \in W, \quad W^{-1} \subseteq W_1$$

が成り立つ．

$$W^{-1} \subseteq W_1 \Longrightarrow W \subseteq W_1^{-1} \Longrightarrow VW \subseteq VW_1^{-1}$$

なので，命題 1.4(a) が成り立つ． □

命題 1.6. 群 G の単位元を e とし，e を含む G の部分集合の族 $\mathcal{B}_e$ が次の条件を満たしているとする：

(a) $U, V \in \mathcal{B}_e \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{B}_e$

(b) $U \in \mathcal{B}_e \Longrightarrow VW \subseteq U \ (\exists V, \exists W \in \mathcal{B}_e)$

(c) $U \in \mathcal{B}_e \Longrightarrow V^{-1} \subseteq U \ (\exists V \in \mathcal{B}_e)$

(d) $U \in \mathcal{B}_e, g \in U \Longrightarrow gV \subseteq U \ (\exists V \in \mathcal{B}_e)$

(e) $U \in \mathcal{B}_e, g \in G \Longrightarrow gVg^{-1} \subseteq U \ (\exists V \in \mathcal{B}_e)$

このとき

$$\mathcal{B} = \{gU \mid g \in G, U \in \mathcal{B}_e\}$$

によって G の位相が生成され，この位相で G は位相群になる．

証明. $\mathcal{B}$ によって生成される G の位相 (すなわち開集合の全体) は

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i} \right), \qquad B_{\lambda i} \in \mathcal{B}, \quad n_\lambda \in \mathbb{N}$$

なる形の G の部分集合全体と $\{\phi, G\}$ との合併からなる．この位相によって群 G が位相群の定義 (3) を満たすことを確かめる．

まず，G の元 a に対して

$$a \in \bigcap_{i=1}^{n} a_i U_i, \ a_i \in G, \ U_i \in \mathcal{B}_e \Longrightarrow aV \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} a_i U_i \ (\exists V \in \mathcal{B}_e)$$

であることに注意する．実際，各 i について

$$\begin{aligned} a \in a_i U_i &\Longrightarrow a_i^{-1} a \in U_i \\ &\overset{(d)}{\Longrightarrow} a_i^{-1} a V_i \subseteq U_i \ (\exists V_i \in \mathcal{B}_e) \\ &\Longrightarrow aV_i \subseteq a_i U_i \end{aligned}$$

$V = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ とすると，(a) より

$$V \in \mathcal{B}_e, \qquad aV \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} a_i U_i$$

がいえる．

さて，G の元 a, b と $\mathcal{B}_e$ の元 U に対して，(b) より

$$VW \subseteq U \qquad (\exists V, \exists W \in \mathcal{B}_e)$$

一方，(e) より

$$b^{-1}V_1 b \subseteq V \qquad (\exists V_1 \in \mathcal{B}_e)$$

したがって

$$b^{-1}V_1 bW \subseteq U$$

両辺に ab を掛けて

$$aV_1 bW \subseteq abU$$

ゆえに，先に注意したことから，$U' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\right)$, $B_{\lambda i} \in \mathcal{B}$ を G の開集合とすると

$$\begin{aligned} xy \in U' &\Longrightarrow xy \in \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\ (\exists\lambda \in \Lambda) \\ &\Longrightarrow xyV \subseteq \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\ (\exists\lambda \in \Lambda, \exists V \in \mathcal{B}_e) \\ &\Longrightarrow xV_1yW \subseteq \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\ (\exists\lambda \in \Lambda, \exists V_1\, \exists W \in \mathcal{B}_e) \\ &\Longrightarrow xV_1yW \subseteq U' \end{aligned}$$

となる．これにより，$\mathcal{B}_e$ の元 V_1, W が存在して

$$x \in xV_1, \qquad y \in yW, \qquad xV_1yW \subseteq U'$$

がいえた．これは命題 1.4(a) である．

次に，G の元 a と $\mathcal{B}_e$ の元 U に対して，(e) より

$$aVa^{-1} \subseteq U\ (\exists V \in \mathcal{B}_e)$$

一方，(c) から

$$W^{-1} \subseteq V\ (\exists W \in \mathcal{B}_e)$$

したがって

$$aW^{-1}a^{-1} \subseteq U$$

ゆえに

$$(aW)^{-1} = W^{-1}a^{-1} \subseteq a^{-1}U$$

再び先に注意したことから，$U' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\right)$, $B_{\lambda i} \in \mathcal{B}$ を G の開集合とすると

$$\begin{aligned} x^{-1} \in U' &\Longrightarrow x^{-1} \in \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\ (\exists\lambda \in \Lambda) \\ &\Longrightarrow x^{-1}V \subseteq \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\ (\exists\lambda \in \Lambda, \exists V \in \mathcal{B}_e) \\ &\Longrightarrow (xW)^{-1} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} B_{\lambda i}\ (\exists\lambda \in \Lambda, \exists W \in \mathcal{B}_e) \\ &\Longrightarrow (xW)^{-1} \subseteq U' \end{aligned}$$

となる．これにより，$\mathcal{B}_e$ の元 W が存在して

$$x \in xW, \qquad (xW)^{-1} \subseteq U'$$

がいえた．これは命題 1.4(b) である． □

例 1.7. G を群とする．命題 1.6 において，$\mathcal{B}_e = \{\{e\}\}$ とすると，$\mathcal{B}_e$ は命題 1.6 の条件 (a)〜(e) を満たし，$\mathcal{B} = \{\{g\} \mid g \in G\}$ となる．$\mathcal{B}$ によって生成される G の位相は離散位相である．

例 1.8. G を群とし，$\mathcal{N}$ を指数 $(G : N)$ が有限であるような正規部分群 N の全体からなる集合とする．このとき $\mathcal{N}$ は命題 1.6 の条件 (a)〜(e) を満たす．このとき

$$\mathcal{B} = \{gN \mid g \in G,\, N \in \mathcal{N}\}$$

により生成される位相によって G は位相群をなす．

例 1.9. G を群，p を素数とし，$\mathcal{N}_p$ を指数 $(G : N)$ が p のベキであるような正規部分群 N の全体からなる集合とする．このとき $\mathcal{N}_p$ は命題 1.6 の条件 (a)〜(e) を満たす．このとき

$$\mathcal{B}_p = \{gN \mid g \in G,\, N \in \mathcal{N}_p\}$$

により生成される位相によって G は位相群をなす．

位相群 G_1 から位相群 G_2 への写像 f が群としての準同型写像であり，しかも，位相空間として連続写像かつ開写像であるとき，f を G_1 から G_2 への**準同型写像**という．位相群としての準同型写像 f がさらに全単射でもあるとき，f を**同型写像**という．

2 つの位相群 G_1 と G_2 との間に同型写像が存在するとき，G_1 と G_2 とは**同型**であるといい，$G_1 \cong G_2$ で表す．

例 1.10. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ とは位相群として同型である．実際，指数関数

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

は群としての準同型写像であり，しかも連続写像である．さらに，対数関数

$$\log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

は exp の逆写像であり，これも連続写像である．

命題 1.11. G_1, G_2, G_3 を位相群とする．このとき次のことが成り立つ．

(1) $G_1 \cong G_1$

(2) $G_1 \cong G_2 \Longrightarrow G_2 \cong G_1$

(3) $G_1 \cong G_2,\, G_2 \cong G_3 \Longrightarrow G_1 \cong G_3$

証明.

(1) 恒等写像を考えればよい．

(2) 明らかである．

(3)　2 つの同型写像 $f : G_1 \longrightarrow G_2$, $g : G_2 \longrightarrow G_3$ の合成写像 $g \circ f$ を考えればよい (2 つの全単射の合成は全単射である．このことは連続写像や開写像についても成り立つ).

□

命題 1.12.　G を位相群とする．逆元の写像

$$\psi : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto x^{-1}$$

は同相写像である．

証明.　連続性は位相群の定義より明らか．ψ の逆写像は ψ 自身なので，とくに逆写像もまた連続である． □

命題 1.13.　位相群 G の任意の元 a に対して，写像

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto xa$$

は同相写像である．

証明.　U を G の開集合，x を G の元とし

$$xa = f_a(x) \in U$$

と仮定する．命題 1.4(a) によって

$$x \in V, \quad a \in W, \quad VW \subseteq U$$

なる G の開集合 V, W が存在する．このとき

$$f_a(V) = Va \subseteq VW \subseteq U$$

ゆえに f_a は連続である．

f_a の逆写像は

$${f_a}^{-1} : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto xa^{-1}$$

であり，これも連続である． □

系 1.14.　G を位相群，a を G の元，S を G の部分集合，U を G の開集合とする．

(1)　Ua は G の開集合である．

(2)　US は G の開集合である．

証明.

(1)　G の任意の元 a に対して，写像

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto xa$$

は同相写像である．ゆえに，U は f_a によって開集合 Ua に写される．

(2)　(1) により，S の元 a に対して Ua は G の開集合である．このとき

$$US = \bigcup_{a \in S} Ua$$

は開集合の和集合である．よって US も開集合である．

□

注意 1.15.　位相群 G の元 a に対して，写像

$$f'_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto ax$$

が同相写像であること，および，開集合 U に対して aU, SU もまた開集合であることなどは上に述べたのと全く同様にして示すことができる．

系 1.16.　位相群 G の任意の 2 元 a, b に対して，G から G 自身への同相写像 f で $f(a) = b$ となるものが存在する．

証明．G の元 a, b に対して，$f(x) = xa^{-1}b$ と定義すればよい．□

命題 1.17.　位相群 G は正則空間である．

証明．G の任意の元 a と，a を含まない任意の閉集合 S に対して，開集合 U, V が存在して

$$a \in U, \quad S \subseteq V, \quad U \cap V = \phi$$

となることをいえばよい．系 1.16 により，G から G 自身への同相写像 f で $f(a) = e$ となるものが存在する．したがって

$$e \in f(U), \quad S \subseteq f(V), \quad f(U) \cap f(V) = \phi$$

を示せば十分である．よって単位元 e についてのみ考察すればよい．

G に対する S の補集合 S^c は e を含む開集合である．$ee^{-1} = e$ ゆえ，ある開集合 U が存在して

$$e \in U, \quad UU^{-1} \subseteq S^c$$

が成り立つ．$\overline{U} \subseteq S^c$ を示す．そうすれば $V = \overline{U}^c$ とおくことにより U, V が冒頭に述べた条件をみたす開集合であることがわかる．

p を $\overline{U}$ の点とすると，p を含む任意の開集合は U と交わる．一方，pU は p を含む開集合であるから $pU \cap U \neq \phi$．したがって U の元 x, y が存在して $y = px$ である．ゆえに

$$p = yx^{-1} \in UU^{-1} \subseteq S^c$$

これは $\overline{U} \subseteq S^c$ を示している．□

命題 1.18.　位相群 G の 2 つの部分集合 P, Q がコンパクトならば，PQ もまたコンパクトである．

証明．P, Q を位相空間 G の部分空間と見て，それらの直積空間 $P \times Q$ を考える．$P \times Q$ から PQ への写像 f を $f(x, y) = xy$ によって定義する．写像 f は連続である．実際，$a \in P$, $b \in Q$ と

し，U を $ab \in U$ なる G の開集合とすれば，命題 1.4 により，P の開集合 V と Q の開集合 W が存在して $VW \subseteq U$ となる．よって $P \times Q$ における開集合 $V \times W$ は

$$(a, b) \in V \times W, \quad f(V \times W) = VW \subseteq U$$

をみたす．これは f の連続性を示している．2 つのコンパクト空間の直積空間もまたコンパクト空間であるから，$P \times Q$ はコンパクトである．さらにコンパクト空間の連続写像による像はコンパクトだから，PQ もまたコンパクトである． □

例 1.19. 有限群は離散位相により位相群をなす．これを**有限位相群**という．

命題 1.20. 有限位相群は完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間である．

証明. G を有限位相群とする．G には離散位相が入っていることに注意する．

(i) Hausdorff 空間であること：G の相異なる 2 つの元 x, y に対して，1 点集合 $\{x\}$, $\{y\}$ は G の開集合であって

$$x \in \{x\}, \quad y \in \{y\}, \quad \{x\} \cap \{y\} = \phi$$

を満たす．

(ii) コンパクトであること：G においてはすべての開集合は有限個の 1 点集合の和集合で表される．ゆえに，G の開被覆はすべて有限開被覆である．

(iii) H を，相異なる 2 点を含む，G の部分集合とする．そこで $H := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \neq 2$ とし，$i \neq j$ のとき $x_i \neq x_j$ であるとする．$O_1 := \{x_1\}$, $O_2 := \{x_2, \ldots, x_n\}$ とおくと，O_1, O_2 は空でない G の開集合であって

$$O_1 \cap O_2 \supseteq H, \quad (O_1 \cap H) \cap (O_2 \cap H) = \phi$$

これは H が連結でないことを示している．ゆえに G は完全不連結である．

□

例 1.21. 位相群 G の部分群を H とする．H に G の部分空間としての位相 (すなわち相対位相) を入れると，H は位相群をなす．これをやはり位相群 G の**部分群**という．さらに，位相群 G の部分群が開集合であるか閉集合であるにしたがって，それぞれ**開部分群**，**閉部分群**という．

証明. 位相群であるための条件 (3) を証明すればよい．U を H の開集合，x, y を H の元とし

$$xy^{-1} \in U$$

とする．U は G のある開集合 O によって

$$U = O \cap H$$

と書ける．とくに xy^{-1} は O に属するので，G のある開集合 V_1, W_1 によって

$$x \in V_1, \quad y \in W_1, \quad V_1 W_1^{-1} \subseteq O$$

が成り立つ．(命題 1.5)．x, y はともに H の元だから

$$x \in V_1 \cap H, \quad y \in W_1 \cap H$$

$V = V_1 \cap H$, $W = W_1 \cap H$ とおけば V, W は H の開集合である．さらに

$$VW^{-1} \subseteq V_1 W_1^{-1} \subseteq O, \quad VW^{-1} \subseteq H$$

ゆえに

$$VW^{-1} \subseteq O \cap H$$

も成り立つ．したがって命題 1.5 より H は位相群であるための条件 (3) をみたす． □

命題 1.22. 位相群 G の開部分群 H は閉集合である．

証明. $\overline{H} = H$ を示せばよい．$a \in \overline{H}$ とする．Ha は a を含む開集合 (系 1.14) だから $H \cap Ha \neq \phi$. したがって，ある $x, y \in H$ が存在して $y = xa$ である．よって

$$a = x^{-1}y \in H$$

ゆえに $\overline{H} \subseteq H$．逆の包含関係は明らかである． □

別証明もある：

証明. G の開部分群 H と G の任意の a に対して Ha は G の開部分群である．

$$G = H \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Ha_\lambda), \quad a_\lambda \notin H$$

を剰余類の直和とする．$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Ha_\lambda)$ は開集合なので，その補集合 H は閉集合である． □

命題 1.23. G を位相群とする．G の任意の元 a に対して，写像

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto a^{-1}xa$$

は位相群としての同型写像である．

証明. f が群の同型写像であることは明らかである．
U を G の開集合，x を G の元とし $a^{-1}xa = f_a(x) \in U$ と仮定する．命題 1.4(a) によって

$$a^{-1} \in V, \quad xa \in W, \quad VW \subseteq U$$

なる G の開集合 V, W が存在する．再び命題 1.4(a) によって

$$x \in W_1, \quad a \in W_2, \quad W_1 W_2 \subseteq W$$

なる G の開集合 W_1, W_2 が存在する．このとき

$$f_a(W_1) = a^{-1}Wa \subseteq VW_1W_2 \subseteq VW \subseteq U$$

ゆえに f_a は連続である．
f_a の逆写像は

$$f_{a^{-1}} : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto axa^{-1}$$

であり，これも連続である． □

命題 1.24. G を位相群とする．

(1)　H が G の部分群ならば，閉包 $\overline{H}$ も G の部分群である．

(2)　H が G の正規部分群ならば，閉包 $\overline{H}$ も G の正規部分群である．

証明.

(1)　$a, b \in \overline{H}$ として $ab^{-1} \in \overline{H}$ を示せばよい．U を $ab^{-1} \in U$ なる G の開集合とする．このとき，G のある開集合 V, W が存在して

$$x \in V, \quad y \in W, \quad VW \subseteq U$$

である (命題 1.5)．$a, b \in \overline{H}$ だから $H \cap V \neq \phi$, $H \cap W \neq \phi$．よって H の元 x, y が存在して $x \in V$, $y \in W$．H が G の部分群であることから

$$xy^{-1} \in H \cap VW^{-1} \subseteq H \cap U$$

すなわち $H \cap U \neq \phi$．したがって $ab^{-1} \in \overline{H}$.

(2)　H を群として G の正規部分群であるとする．G の元 a に対して，写像

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad x \longrightarrow axa^{-1}$$

は位相群としての同型写像だから

$$\overline{aHa^{-1}} = \overline{f_a(H)} = f_a(\overline{H}) = a\overline{H}a^{-1}$$

を得る．$aHa^{-1} = H$ だから $a\overline{H}a^{-1} = \overline{H}$ である．ゆえに $\overline{H}$ は正規部分群である．

□

G を位相群とする．G の単位元の連結成分を G の**連結成分**という．

例 1.25.　$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^\times$ は連結である．

例 1.26.　$\mathbb{R}^\times$ の連結成分は $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ である．

命題 1.27.　位相群 G が連結ならば，G の連結成分は G に一致する．

証明.　G 自身が G において単位元を含む最大の連結部分集合になるから．□

命題 1.28.　位相群 G の連結成分 N は正規閉部分群である．

証明.　連結成分は一般に閉集合である．

a, b を N の 2 つの元とする．N は連結だから，N^{-1} も連結，したがって aN^{-1} も連結である．さらに，aN^{-1} は単位元 e を含む．ゆえに

$$ab^{-1} \in aN^{-1} \subseteq N$$

したがって群として N は G の部分群である．

G の任意の元 a に対して，写像

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto a^{-1}xa$$

は位相群としての同型写像である．N は連結なので，$a^{-1}Na$ も連結である．しかも $a^{-1}Na$ は e を含むので，$a^{-1}Na \subseteq N$ がいえる．□

命題 1.29. G を位相群，a を G の元，N を G の連結成分とする．このとき a の連結成分は aN である．

証明. G の任意の元 a に対して，写像

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto ax$$

は位相群としての同型写像である．よって aN は a を含む連結集合である．ゆえに，a の連結成分を N' とおけば $aN \subseteq N'$ である．

逆に，$f_{a^{-1}}$ が位相群としての同型写像であることから，aN' は連結集合である．N' は a を含むから，aN' は単位元 e を含む．よって $aN' \subseteq N$ がいえる． □

系 1.30. 位相群 G が完全不連結であるためには，G の連結成分が 1 点集合となることが必要十分である．

証明. G が完全不連結 $\Longleftrightarrow$ a の連結成分が 1 点集合 $(\forall a \in G)$ $\Longleftrightarrow$ G の連結成分が 1 点集合． □

例 1.31. 位相加法群 $\mathbb{R}$ の部分群 $\mathbb{Q}$ は完全不連結である．

例 1.32. 位相群 G とその正規部分群 N に対して，剰余群 G/N を考える．

$$\pi : G \longrightarrow G/N, \quad x \longmapsto xN$$

を標準的準同型とする．G/N の部分集合 H が開集合であるということを，$\pi^{-1}(H)$ が G の開集合であることと定義する．すなわち G/N に商位相を入れる．このとき次のことが成り立つ．

(1) π は開写像である．

(2) この位相により G/N は位相群をなす．これを G の N による**商位相群**という．

証明.

(1) 標準的準同型

$$\pi : G \longrightarrow G/N, \quad x \longmapsto xN$$

が開写像であることを示す．U を G の開集合とすると

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = UN$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned} x \in \pi^{-1}(\pi(U)) &\Longleftrightarrow \pi(x) \in \pi(U) \\ &\Longleftrightarrow \pi(x) = \pi(u)\ (\exists u \in U) \\ &\Longleftrightarrow xN = uN\ (\exists u \in U) \\ &\Longleftrightarrow x \in uN\ (\exists u \in U) \\ &\Longleftrightarrow x \in UN \end{aligned}$$

U は G の開集合なので，命題 1.13 より UN も G の開集合である．したがって G/N に対する位相の定め方から $\pi(U)$ は G/N の開集合である．

(2) G/N が上で定めた位相により，位相群であるための条件 (3) を満たすことを示す．U を G/N の開集合，xN, yN $(x, y \in G)$ を G/N の元とし

$$xN(yN)^{-1} \in U$$

と仮定する．

$$xN(yN)^{-1} = xNy^{-1}N = xy^{-1}N$$

だから

$$xy^{-1} \in \pi^{-1}(U)$$

である．$\pi^{-1}(U)$ は G の開集合なので

$$x \in V, \quad y \in W, \quad VW^{-1} \subseteq \pi^{-1}(U)$$

なる G の開集合 V, W が存在する (命題 1.5)．π は全射であり，群として準同型だから

$$xN \in \pi(V), \quad yN \in \pi(W), \quad \pi(V)\pi(W)^{-1} \subseteq U$$

(i) より π は開写像なので，$\pi(V), \pi(W)$ はともに G/N の開集合である．したがって命題 1.5 より G/N は位相群をなすための条件 (3) を満たす．

□

定理 1.33 (位相群の準同型定理). G_1, G_2 を位相群，$f : G_1 \longrightarrow G_2$ を位相群の準同型写像とし，N を f の核とする．このとき，位相群としての同型写像

$$f^* : G_1/N \longrightarrow \mathrm{Im}\, f, \quad xN \longmapsto f(x)$$

が存在する．

証明. f^* が群として同型写像であることは明らか．f および標準的準同型 $\pi : G_1 \longrightarrow G_1/N$ がともに連続かつ開写像であることから f^* が同相写像であることがわかる．□

命題 1.34. N を位相群 G の正規部分群とする．

(1) N が閉集合であるためには，商位相群 G/N が Hausdorff 空間となることが必要十分である．

(2) N が開集合であるためには，商位相群 G/N が離散空間となることが必要十分である．

証明.

(1) N が閉集合であるとする．$xN \neq yN$ とすると，$x \notin yN$ である．yN は閉集合だから，単位元 e の開近傍 U が存在して

$$Ux \cap yN = \phi$$

となる．e の開近傍 V, W を $W^{-1}V \subseteq U$ となるように選ぶ (命題 1.5)．このとき

$$V(xN) \cap W(yN) = \phi$$

が成り立つ．これは G/N が Hausdorff 空間であることを示している．

逆に，G/N が Hausdorff 空間ならば，G/N の 1 点集合 $\{N\}$ は閉集合である．したがって標準的準同型 $G \longrightarrow G/N$ による $\{N\}$ の逆像 N は G における閉集合である．

(2)　離散位相の定義と，標準的準同型 $G \longrightarrow G/N$ が連続かつ開写像であることに注意すれば

$$G/N \text{ が離散的} \iff 1 \text{ 点集合 } \{N\} \text{ が開集合} \iff N \text{ が開集合}$$

□

命題 1.35.　G を位相群，N を G の連結成分とする．このとき商位相群 G/N は完全不連結である．

証明.　$\pi : G \longrightarrow G/N$ を標準的準同型とする．G/N が完全不連結であることをいうには，Y を G/N の連結集合とするとき，$\pi^{-1}(Y)$ が G の連結集合であることを示せば十分である．なぜなら Y を G/N の連結成分とすれば $\pi^{-1}(Y)$ は G の単位元 e を含む連結集合となる．よって $\pi^{-1}(Y) \subseteq N$ となり，$Y = \{N\}$ を得るからである．

G/N の部分集合 Y が連結であるとする．G の開集合 U, V が存在して

$$\pi^{-1} \subseteq U \cap V, \quad (U \cap V) \cap \pi^{-1}(Y) \neq \phi$$

$$U \cap \pi^{-1}(Y) \neq \phi, \quad V \cap \pi^{-1}(Y) \neq \phi$$

が存在したとして矛盾の生じることを示す．

$$Y \subseteq \pi(U) \cup \pi(V), \quad \pi(U) \cap Y \neq \phi, \quad \pi(V) \cap Y \neq \phi$$

であるが，π は開写像だから $\pi(U), \pi(V)$ は開集合である．Y は仮定により連結だから

$$(\pi(U) \cap \pi(V)) \cap Y \neq \phi$$

でなければならない．したがって，U のある元 u と V のある元 v を適当にとって

$$uN = vN, \quad uN \in \pi(U) \cap Y, \quad vN \in \pi(V) \cap Y$$

uN は連結だから

$$uN \subseteq \pi(Y) \subseteq U \cup V, \quad U \cap V \cap uN = \phi, \quad U \cap uN \neq \phi$$

よって $V \cap uN = \phi$ を得る．これは $V \cap uN = V \cap vN \neq \phi$ に矛盾する．　□

例 1.36.　位相群の系 $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき，直積群 $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ に直積位相を入れることにより，$\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は位相群をなす．これを $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積位相群**という．

証明.　$G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ とおく．G が直積位相によって位相群であるための条件 (3) を満たすことを示せばよい．

$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を G の元，U を G の開集合とし

$$(x_\lambda y_\lambda^{-1})_{\lambda \in \Lambda} = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}((y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})^{-1} \in U$$

と仮定する．U は，有限個の λ については U_λ が G_λ の開集合，残りについては $U_\lambda = G_\lambda$ なる直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ の和集合で書ける．よって，そのような直積集合のうちの少なくとも 1 つは，各 λ について

$$x_\lambda y_\lambda^{-1} \in U_\lambda$$

が成り立つ．命題 1.5 より，各 λ について

$$x_\lambda \in V_\lambda, \quad y_\lambda \in W_\lambda, \quad V_\lambda W_\lambda^{-1} \subseteq U_\lambda$$

なる G_λ の開集合 V_λ, W_λ が存在する．このとき

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda,$$

$$(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda,$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda\right)^{-1} = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \prod_{\lambda\in\Lambda} (W_\lambda)^{-1} = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda (W_\lambda)^{-1} \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を満たす．ゆえに命題 1.5 より G は位相群をなす． □

例 1.37. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ はそれぞれ n 個の $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の直積位相群である．

定理 1.38. $(G_i)_{i\in I}$ を位相群の系とし，$G := \prod_{i\in I} G_i$ を直積位相群とする．

(1) 各 G_i がコンパクトならば，G もコンパクトである．

(2) 各 G_i が Hausdorff 空間ならば，G も Hausdorff 空間である．

(3) 各 G_i が完全不連結ならば，G も完全不連結である．

証明. (1)，(2) は位相空間についての一般論からわかる．(3) のみ示す．射影

$$p_i : G \longrightarrow G_i, \quad (x_i)_{i\in I} \longmapsto x_i$$

は連続写像である．よって G の連結成分 N の像 $p_i(N)$ は連結である．ゆえに G_i の単位元 e_i の連結成分が $\{e_i\}$ であれば，$P_i(N) = \{e_i\}$ である．G の任意の元 x の連結成分は xN と表せるから，各 G_i が完全不連結ならば直積位相群 G も完全不連結である． □