1　対称式

K を体とし，$f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を K 係数の n 変数の多項式とする．n 次対称群 S_n の元 σ に対して

$$f^\sigma = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$

とおく．つまり，f において X_i を $X_{\sigma(i)}$ におきかえたものを f^σ とおく．また，S_n の二つの元 σ, τ に対して,

$$f^{\sigma\tau} = f(X_{\sigma\tau(1)}, X_{\sigma\tau(2)}, \ldots, X_{\sigma\tau(n)})$$

とする．すなわち，$f^{\sigma\tau} = (f^\tau)^\sigma$ とする．

任意の $\sigma \in S_n$ に対して $f^\sigma = f$ となるとき，f を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する**対称式**という．

二つの対称式の和, 差, 積もまた対称式である．よって対称式の全体は多項式環 $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ の部分整域になる．

$1 \leq k \leq n$ なる整数 k に対して,

$$s_k = s_k(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k}^{n} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}$$

はすべて対称式である．これらの対称式 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する**基本対称式**という．

例 1.1.　X_1, X_2, X_3 に関する基本対称式は

$$X_1 + X_2 + X_3, \quad X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3, \quad X_1X_2X_3$$

である．

定理 1.2.　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する K 係数の対称式 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ を K 係数の n 変数の多項式 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ に代入したもの

$$\begin{aligned} &h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &\quad = g(f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \end{aligned}$$

は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する対称式である．

証明.　$f_1, f_2, \ldots, f_n$ は対称式なので，S_n の元 σ に対して,

$$h^\sigma = g(f_1^\sigma, f_2^\sigma, \ldots, f_n^\sigma) = g(f_1, f_2, \ldots, f_n) = h$$

となる．よって $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する対称式である．　□

K の元を係数とする単項式 $aX_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}$ $(a \in K)$ に対して,

$$aX_{\sigma(1)}^{e_1}X_{\sigma(2)}^{e_2}\cdots X_{\sigma(n)}^{e_n} \qquad (\sigma \in S_n)$$

を $aX_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}$ と**同型な単項式**という．

単項式 $aX_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}$ と同型な単項式の中には

$$e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n$$

を満たすものが必ずある．このとき，組

$$(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$$

を $aX_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}$ の**型**という．

単項式が与えられたとき，それと同型なすべての単項式の和は対称式である．とくに，係数が 1 の単項式 $X_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}$ と同型なすべての単項式の和を**単型対称式**という．また，単型対称式が項としてもつ単項式の型をその単型対称式の**型**という．

例 1.3. $X_1^2X_2^3X_3$ と同型な単項式は

$$X_1^2X_2^3X_3, \quad X_1^2X_2X_3^3, \quad X_1^3X_2^2X_3, \quad X_1X_2^2X_3^3, \quad X_1^3X_2X_3^2, \quad X_1X_3^2X_2^3$$

である．これらの和

$$X_1^2X_2^3X_3 + X_1^2X_2X_3^3 + X_1^3X_2^2X_3 + X_1X_2^2X_3^3 + X_1^3X_2X_3^2 + X_1X_3^2X_2^3$$

は単型対称式である．この単型対称式の型は (3, 2, 1) である．

例 1.4. $X_1^2X_2^2X_3$ と同型な単項式は

$$X_1^2X_2^2X_3, \quad X_1^2X_2X_3^2 \quad X_1X_2^2X_3^2$$

である．これらの和

$$X_1^2X_2^2X_3 + X_1^2X_2X_3^2 + X_1X_2^2X_3^2$$

は単型対称式である．この単型対称式の型は (2, 2, 1) である．

例 1.5. 基本対称式は単型対称式である．

例 1.6. 同じ次数の冪の和 $X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k$ は単型対称式である．

二つの単型対称式 f, g の大小を，次のようにして定義する: f, g の型をそれぞれ $(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$, $(e'_1,\, e'_2,\, \ldots,\, e'_n)$ とするとき，

$$f < g \iff \text{ある番号 } i \text{ が存在して } e_1 = e'_1, \ldots, e_i = e'_i, e_{i+1} < e'_{i+1} \text{ となる}$$

すなわち，型 $(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$ に関して辞書式順序を入れる．$f < g$ であるとき，f は g より**低位**であるといい，g は f より**高位**であるということにする．

注意 1.7. 単型対称式全体は，この順序によって自然数全体 $\mathbb{N}$ と順序同型になる．

定理 1.8. 体 K 上の $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ に関する対称式 f はすべて，基本対称式 $s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_n$ の K 係数の多項式として表される．すなわち，ある K 係数の多項式 $g(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ が存在して，

$$f = g(s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_n)$$

となる．しかもその表し方は一意的である．

証明. すべての対称式は単型対称式に定数をかけたものの和として表すことができる．よって，定理の前半については，f が単型対称式である場合に証明すれば十分である．

単型対称式の順序に関する数学的帰納法で証明する．単型単項式が定数，すなわち K の元である場合や，基本対称式である場合は明らかである．

一般の単型対称式 f について，その型を $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ として，f よりも低位なすべての単型対称式に関しては定理の主張が正しいと仮定する．

$$s_1^{l_1} s_2^{l_2} \cdots s_n^{l_n} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^{l_1} (X_1 X_2 + \cdots + X_{n-1} X_n)^{l_2} \cdots (X_1 X_2 \cdots X_n)^{l_n}$$

を展開して，それを単型対称式の整数倍の和として表せば，最高位の単型対称式の型は

$$(l_1 + l_2 + \cdots + l_n,\, l_2 + l_3 + \cdots + l_n,\, \ldots,\, l_n)$$

である．これが f と同型であるためには，

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (l_1 + l_2 + \cdots + l_n,\, l_2 + l_3 + \cdots + l_n,\, \ldots,\, l_n),$$

すなわち，

$$l_1 = e_1 - e_2, \quad l_2 = e_2 - e_3, \quad \ldots, \quad e_n = l_n$$

であればよい．よって $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \ldots, l_n \geq 0$.

このように $l_1, l_2, \ldots, l_n$ を定めれば，$s_1^{l_1} s_2^{l_2} \cdots s_n^{l_n}$ に含まれる最高位の単型単項式がちょうど f になる．よって，

$$f_1 = f - s_1^{l_1} s_2^{l_2} \cdots s_n^{l_n}$$

とおけば，f_1 は f よりも低位の型の単型多項式の整数倍の和で表される対称式である．ゆえに帰納法の仮定によって，ある $g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ が存在して，

$$f_1 = g_1(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

となる．したがって，

$$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1^{l_1} X_2^{l_2} \cdots X_n^{l_n} + g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

とおけば，

$$f = g(s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

となる．

次に一意性を証明する．仮に，ある対称式 f が基本対称式 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の多項式として二通りに表されているとする．すなわち，

$$f = g(s_1, s_2, \ldots, s_n) = g'(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

において，$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq g'(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ であるとする．

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) - g'(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

とおけば，

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad h(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$$

となる．このようなことは不可能である．

実際，$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq 0$ ならば，ある $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ が存在して，

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$$

となる．このとき，方程式

$$X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

の根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ について，

$$a_i = s_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

であるから，

$$h(s_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), s_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ldots, s_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \neq 0$$

となる．これは $h(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$ に反する．したがって $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$，すなわち $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g'(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ でなければならない． □

注意 1.9. 一意性の証明について一言．たとえば，

$$\begin{aligned}
f(X_1, X_2, X_3) &= X_1 + X_2 + X_3, \\
g_1(X_1, X_2, X_3) &= X_1 - X_2, \\
g_2(X_1, X_2, X_3) &= X_2 - X_3, \\
g_3(X_1, X_2, X_3) &= X_3 - X_1
\end{aligned}$$

とおくと，明らかに $f(X_1, X_2, X_3) \neq 0$ であるが，

$$\begin{aligned}
&f(g_1(X_1, X_2, X_3), g_2(X_1, X_2, X_3), g_3(X_1, X_2, X_3)) \\
&\qquad = (X_1 - X_2) + (X_2 - X_3) + (X_3 - X_1) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

である．一意性の証明では，基本対称式に関しては，このようなことが起こらないということを言っている．

$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を K 係数の n 変数の有理式とする．n 次対称群 S_n の元 σ に対して

$$F^\sigma = F^\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = F(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$

とおく．任意の $\sigma \in S_n$ に対して $F^\sigma = F$ となるとき，F を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する**有理対称式**という．有理対称式の全体は有理関数体 $K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の部分体になる．

定理 1.10. 任意の有理対称式 F は，ある対称式 f, g によって $F = f/g$ と表される．

証明. F は有理式であるから，多項式 f, g によって

$$F = f/g, \qquad g \neq 0, \qquad (f, g) = 1$$

と表される．

いま仮に，f が対称式でないとすれば，n 次対称群 S_n は互換全体で生成されるから，ある互換 σ が存在して $f^\sigma \neq f$ となる．$\sigma = (1\,2)$ としても一般性を失わない．仮定によって

$$\frac{f}{g} = \frac{f^\sigma}{g^\sigma}$$

となる．$(f,\, g) = 1$ であるから，ある $h \in K[X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n]$ が存在して，

$$f^\sigma = hf, \qquad g^\sigma = hg$$

である．$\deg f^\sigma = \deg f$ なので，$h \in K$ である．$f^{\sigma^2} = f$ であるから，

$$f = f^{\sigma^2} = hf^\sigma = h^2 f.$$

ゆえに $h^2 = 1$．$f \neq f^\sigma$ より $h = -1$ を得る．$X_1 = X_2$ とすれば，

$$\begin{aligned}
f(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) = f^\sigma(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) = -f(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n),\\
g(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) = g^\sigma(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) = -g(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n).
\end{aligned}$$

したがって，

$$f(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) = g(X_2,\, X_2,\, X_3,\, \ldots,\, X_n) = 0.$$

よって因数定理により $f,\, g$ はともに $X_1 - X_2$ で割りきれる．これは $(f,\, g) = 1$ に反する． $\square$

2　交代式

n 個の変数 $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ の K 係数の多項式

$$\begin{aligned}
\varDelta &= \varDelta(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)\\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)\\
&= (X_1 - X_2)(X_1 - X_3) \cdots (X_1 - X_n)\\
&\qquad\qquad\quad \times (X_2 - X_3) \cdots (X_2 - X_n)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \times (X_{n-1} - X_n)
\end{aligned}$$

を $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ の**差積**という．

定理 2.1．　$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ の差積 δ は $n(n-1)/2$ 次の同次多項式である．すなわち，K の任意の元 c に対して

$$\varDelta(cX_1,\, cX_2,\, \ldots,\, cX_n) = c^{\frac{n(n-1)}{2}} \varDelta(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$$

が成り立つ．

証明.　$\varDelta$ の因子 $X_i - X_j\,(1 \leq i < j \leq n)$ の個数は

$$n + (n-1) + \cdots + 1 = n(n-1)/2$$

である．よって，任意の $c \in K$ に対して

$$\begin{aligned}\varDelta(cX_1,\, cX_2,\, \ldots,\, cX_n) &= \prod_{1\le i<j\le n}(cX_i - cX_j) = \prod_{1\le i<j\le n} c\,(X_i - X_j)\\ &= c^{\frac{n(n-1)}{2}}\varDelta(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)\end{aligned}$$

となる． □

f を K 係数の n 変数の多項式とする．任意の $\sigma \in S_n$ に対して $f^\sigma = (\mathrm{sgn}\ \sigma)f$ となるとき，f を $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ に関する**交代式**という．

定理 2.2. 差積 $\varDelta$ は $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ に関する交代式である．すなわち，n 次対称群 S_n の任意の元 σ に対して，

$$\varDelta^\sigma = (\mathrm{sgn}\ \sigma)\varDelta$$

が成り立つ．

証明. 互換 $\tau = (k\ k+1)$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned}\varDelta = (X_k - X_{k+1})&\prod_{i<k}(X_i - X_k)(X_i - X_{k+1})\\ &\times \prod_{k+1<j}(X_k - X_j)(X_{k+1} - X_j) \times (\text{その他の } X_i - X_j \text{ の積})\end{aligned}$$

より，$\varDelta^\tau = \varDelta$ であることがわかる．τ は互換であるから，$\mathrm{sgn}\ \tau = -1$．したがって $\varDelta^\tau = (\mathrm{sgn}\ \tau)\varDelta$ である．

S_n の任意の元 σ は，$(k\ k+1)$ なる形の互換 $\sigma_1,\, \sigma_2,\, \ldots,\, \sigma_r$ の積で書ける：$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r$．このとき，

$$\begin{aligned}\varDelta^\sigma &= \varDelta^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r}\\ &= (\mathrm{sgn}\ \sigma_r)\varDelta^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{r-1}}\\ &= \cdots\cdots\\ &= (\mathrm{sgn}\ \sigma_r)(\mathrm{sgn}\ \sigma_{r-1})\cdots(\mathrm{sgn}\ \sigma_1)\varDelta\\ &= (\mathrm{sgn}\ \sigma_1)(\mathrm{sgn}\ \sigma_2)\cdots(\mathrm{sgn}\ \sigma_r)\varDelta\\ &= (\mathrm{sgn}\ \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r)\varDelta\\ &= (\mathrm{sgn}\ \sigma)\varDelta\end{aligned}$$

となる． □

系 2.3. $\sigma \in S_n$ について，

$$\sigma \text{ が偶置換} \iff \varDelta^\sigma = \varDelta$$

である．

証明. σ が偶置換ならば，$\mathrm{sgn}\ \sigma = 1$ だから，$\varDelta^\sigma = \varDelta$ となる．逆に，

$$\varDelta^\sigma = \varDelta \Longrightarrow (\mathrm{sgn}\ \sigma)\varDelta = \varDelta \Longrightarrow (\mathrm{sgn}\ \sigma - 1)\varDelta = 0.$$

$\varDelta \neq 0$ より，$\mathrm{sgn}\ \sigma - 1 = 0$．したがって $\mathrm{sgn}\ \sigma = 1$．ゆえに σ は偶置換である． □

定理 2.4.　K 係数の n 変数多項式 f が $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する交代式であれば，f は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の差積 Δ と $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する適当な対称式 g との積として表される．

証明.　互換 $(1\ 2)$ に対して

$$f^{(1\ 2)} = -f$$

であるから，この式の両辺において，$X_1 = X_2$ とおけば

$$f(X_1, X_1, X_3, \ldots, X_n) = -f(X_1, X_1, X_3, \ldots, X_n)$$

となる．したがって

$$f(X_1, X_1, X_3, \ldots, X_n) = 0$$

となり，因数定理から $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が $X_1 - X_2$ で割りきれることがわかる．

その他の互換 $(i\ j)$ に対しても同様の理由で $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が $X_i - X_j$ で割りきれることがいえる．$X_i - X_j\ (1 \leq i < j \leq n)$ は二つずつ互いに素であり，$K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ は一意分解整域だから，$f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は差積 Δ で割りきれる．すなわち，ある K 係数の多項式 g が存在して

$$f = \Delta g$$

となる．f, Δ は交代式なので，S_n の任意の元 σ に対して，

$$(\mathrm{sgn}\ \sigma)f = f^\sigma = \Delta^\sigma g^\sigma = (\mathrm{sgn}\ \sigma)\Delta g^\sigma.$$

したがって

$$g^\sigma = g$$

が得られる．よって g は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に関する対称式である．　□

系 2.5.　交代式の 2 乗は対称式である．

証明.　任意の交代式 f は差積 Δ と対称式 $g \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ によって $f = \Delta g$ と表されるので，Δ^2 が対称式であることを示せば十分である．ところが

$$(\Delta^2)^\sigma = (\Delta^\sigma)^2 = (\mathrm{sgn}\ \sigma)^2\Delta^2 = \Delta^2$$

であるから，Δ^2 は対称式である．　□