

1 空間

一般に、ある集合が幾何学的考察の対象として扱われるとき、その集合を空間と呼び、その元を点と呼びます。

幾何学的考察の対象というのは、ここでは「測度」が定義された（あるいは、これから定義しようとしている）集合のことを意味します。測度とは、ある対象の「大きさ」を測る規則のことで、長さ、面積、体積といった概念を一般化したものです。

以下の議論で、空間の例として、閉区間 $[a, b]$ や実数全体の集合の直積 \mathbb{R}^N を考えるとよいでしょう。 \mathbb{R}^N は Euclid 空間と呼ばれています。

2 加法族

定義 1 (加法族). 空間 X の部分集合からなる集合族 \mathfrak{B} が次の三つの条件を満たすとき、 \mathfrak{B} を加法族と呼ぶ：

- (i) $\phi \in \mathfrak{B}$,
- (ii) $E \in \mathfrak{B} \implies E^c \in \mathfrak{B}$,
- (iii) $E_n \in \mathfrak{B} (n = 1, 2, \dots) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$.

ただし、 E^c は X 内における E の補集合 $X \setminus E$ である。

空間 X と加法族 \mathfrak{B} との組 (X, \mathfrak{B}) を可測空間と呼ぶ。

条件 (iii) は完全加法性と呼ばれています。

加法族は、完全加法族、可算加法族、 σ -加法族、集合代数、 σ -代数などと呼ばれることもあります。

二つの集合の和集合をとる操作を集合における「加法」と考えたとき、その「加法」について閉じた集合族を加法族と呼ぶわけです。空集合 ϕ は「加法」における「単位元」とみなすことができます。 E の補集合 E^c は「加法」における E の「逆元」と考えることができます。

例 2.1. 空間 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ は加法族である。

定理 2.2. 空間 X の部分集合からなる任意の集合族 \mathfrak{A} に対して、 \mathfrak{A} を含む加法族 \mathfrak{B} で、包含関係に関して最小のものが必ず存在する。この \mathfrak{B} を \mathfrak{A} から生成される加法族といい、 $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}]$ で表す。

3 測度

定義 2 (集合関数). 集合族 \mathfrak{A} から $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ への写像のことを、 \mathfrak{A} 上定義された集合関数という。

測度は、空間 X で定義された「ある条件」を満たす集合関数として定義されます。

定義 3 (測度). X を空間とし、 \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族とする。 \mathfrak{B} 上定義された集合関数 μ が次の二つの条件を満たすとき、 μ を \mathfrak{B} 上定義された X の測度という：

- (i) $\mu(\phi) = 0$,
- (ii) $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$,

(iii) $A_n \in \mathfrak{B} (n = 1, 2, \dots)$ とし, $j \neq k$ ならば $A_j \cap A_k = \phi$ であるとする. このとき,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つ.

空間 X とその部分集合からなる加法族 \mathfrak{B} , および \mathfrak{B} で定義された X 上の測度 μ の組 (X, \mathfrak{B}, μ) を測度空間と呼ぶ.

条件 (i) は, 何もないものの「大きさ」は 0 であるということです.

条件 (ii) は単調性と呼ばれています. 単調性とは, A が B の部分集合ならば, B の方が A より「大きい」ということを意味します.

条件 (iii) は完全加法性と呼ばれています. 加法性とは, 交わりのない複数の集合について, 和集合の「大きさ」は, それぞれの集合の「大きさ」の和に等しいということです. そして, 加法性が完全であるとは, 可算無限個の集合についても成り立つ, という意味です.

注意 3.1. 測度の条件 (i), (ii) より, 非負性と呼ばれる条件が導かれる. 測度の非負性とは, 任意の $A \in \mathfrak{B}$ に対して $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ が成り立つことである.

実際, 空集合 ϕ はすべての集合の部分集合だから, (ii) より

$$\mu(\phi) \leq \mu(A) \quad (\forall A \in \mathfrak{B})$$

が成り立つ. (i) より $\mu(\phi) = 0$ なので, 非負性がいえる.

例 3.2. 空間 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ は加法族をなす. $\mathfrak{P}(X)$ 上の集合関数 μ を

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \phi \\ \infty, & A \neq \phi \end{cases}$$

によって定義する. このとき μ は $\mathfrak{P}(X)$ 上定義された X の測度である.

例 3.3. 空間 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ は加法族をなす. $\mathfrak{P}(X)$ 上の集合関数 μ を

$$\mu(A) = \begin{cases} (A \text{ の元の個数}), & A \text{ が有限集合のとき} \\ \infty, & A \text{ が無限集合のとき} \end{cases}$$

によって定義する. このとき μ は $\mathfrak{P}(X)$ 上定義された X の測度である. この μ を X の個数測度という.

上の二つの例からわかるように, 一般に, 空間 X と加法族 \mathfrak{B} に対して, 測度の決め方は一通りではありません.

4 外測度

定義 4 (外測度). 空間 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ 上定義された集合関数 Γ が次の三つの条件を満たすとき, Γ を X の外測度と呼ぶ:

(i) $\Gamma(\phi) = 0,$

- (ii) $A \subseteq B \implies \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$,
- (iii) $\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$.

上の条件 (ii), (iii) はそれぞれ単調性, 劣加法性と呼ばれています.

上で定義した外測度 Γ は, Carathéodory 外測度と呼ばれることもあります.

定義 5 (Γ -可測). X を空間とし, Γ を X の外測度とする. X の部分集合 E が Γ -可測であるとは, 任意の $A \subseteq X$ に対して

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$$

が成り立つときにいう. ただし $E^c = X \setminus E$ である.

Γ -可測であるような集合を, Γ -可測集合という.

つまり, X の任意の部分集合 A について, A を E と交わる部分と, 交わらない部分 (すなわち E^c と交わる部分) とに二分すると, それぞれの部分の「大きさ」の和が, もとの A の「大きさ」に等しいとき, E を Γ -可測集合と呼びます.

定理 4.1 (Carathéodory の定理). X を空間, Γ を X の外測度とし, \mathfrak{M}_Γ を Γ -可測集合の全体とする.

- (i) \mathfrak{M}_Γ は加法族である.
- (ii) Γ の \mathfrak{M}_Γ への制限は \mathfrak{M}_Γ 上定義された X の測度である.

上の定理は「外測度から測度を構成することができる」ことを示唆しています.

5 有限加法的測度

測度空間を構成することは, 一般には容易ではありません. なぜなら, 測度の定義における完全加法性がとても強い条件だからです. したがって実際には「より条件の弱い測度」から出発し, そこから完全加法性を満たす測度を構成していきます.

定義 6 (有限加法族). 空間 X の部分集合からなる集合族 \mathfrak{F} が次の三つの条件を満たすとき, \mathfrak{F} を有限加法族と呼ぶ:

- (i) $\phi \in \mathfrak{F}$,
- (ii) $E \in \mathfrak{F} \implies E^c \in \mathfrak{F}$,
- (iii) $E_1, E_2 \in \mathfrak{F} \implies E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{F}$.

注意 5.1. 有限加法族の定義の条件 (i), (ii) から, $X \in \mathfrak{F}$ がすぐに導かれる.

加法族が, 有限加法族の定義を満たしていることはすぐにわかると思います.

加法族という言葉の由来から考えると, 有限加法族を加法族と呼ぶほうが自然ですが, 完全加法族の概念の方が有限加法族よりずっと多く使われるという事情により, 専門家たちは完全加法族の方を加法族と呼ぶことにしているようです.

定義 7 (有限加法的測度). X を空間とし, \mathfrak{F} を X の部分集合からなる有限加法族とする. \mathfrak{F} 上定義された集合関数 m が次の二つの条件を満たすとき, m を \mathfrak{F} 上定義された X の有限加法的測度という:

- (i) $m(\phi) = 0$,
- (ii) $A \subseteq B \implies m(A) \leq m(B)$,
- (iii) $A_1, A_2 \in \mathfrak{F}$ とし, $A_1 \cap A_2 = \phi$ であるとする. このとき,

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$$

が成り立つ.

上の条件 (ii), (iii) はそれぞれ単調性, 有限加法性と呼ばれています.
有限加法的測度は, Jordan 測度と呼ばれることもあります.

定理 5.2. X を空間, \mathfrak{F} を X の部分集合からなる有限加法族, m を \mathfrak{F} 上定義された X の有限加法的測度とする. X の部分集合 A に対して, 次の二つの条件を満たすような \mathfrak{F} の部分集合族の全体を $\{\mathfrak{E}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とする:

- (a) \mathfrak{E}_λ の濃度は加算あるいは有限である.
- (b) \mathfrak{E}_λ は A を被覆する. すなわち $A \subseteq \bigcup \mathfrak{E}_\lambda$.

ただし $\bigcup \mathfrak{E}_\lambda = \{x \in X \mid \exists E \in \mathfrak{E}_\lambda \text{ s.t. } x \in E\}$ とする. さらに各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathfrak{E}_\lambda = \{E_{\lambda,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ とおく. このとき,

$$\Gamma(A) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} m(E_{\lambda,n})$$

と定義すると, Γ は X の外測度である.

定義 8. X を空間, \mathfrak{F} を X の部分集合からなる有限加法族, m を \mathfrak{F} 上定義された X の有限加法的測度とする.

m が完全加法的であるとは, $A_n \in \mathfrak{F}$ ($n = 1, 2, \dots$) とし, $j \neq k$ ならば $A_j \cap A_k = \phi$ であるとするとき, もし $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ ならば

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

が成り立つときにいう.

定理 5.3 (Hopf の拡張定理). X を空間, \mathfrak{F} を X の部分集合からなる有限加法族, m を \mathfrak{F} 上定義された X の有限加法的測度とする. m が $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ 上定義された X の測度 μ に拡張できるための必要十分条件は, m が完全加法的であることである.

6 Lebesgue 測度

定義 9. Euclid 空間 R^N において, $-\infty \leq a_\nu < b_\nu \leq \infty$ であるような a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) に対して,

$$\prod_{\nu=1}^N (a_\nu, b_\nu]$$

であるような形の集合を N 次元区間という. また, 空集合も N 次元区間に含める. 有限個の N 次元区間の直和として表される集合を区間塊という.

以下、この節では、 $X = \mathbb{R}^N$ とし、 $\mathfrak{F}_N = (N \text{ 次元区間塊全体})$ とおくことにします。

命題 6.1. \mathfrak{F}_N は有限加法族である。

命題 6.2. \mathfrak{F}_N 上定義された X の有限加法的測度 m で、

$$m\left(\prod_{\nu=1}^N (a_\nu, b_\nu]\right) = \prod_{\nu=1}^N (b_\nu - a_\nu)$$

を満たすものがただ一つ存在する。ただし、

$$a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad -\infty \leq a_\nu < b_\nu \leq \infty \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

であるとする。

命題 6.2 で存在が保証されている X の有限加法的測度を $m^{(N)}$ と書くことにします。

定理 6.3. $m^{(N)}$ は完全加法的である。

定義 10. 定理 5.2 を、この節で定義した空間 X 、有限加法族 \mathfrak{F}_N 、有限加法的測度 $m^{(N)}$ に対して適用することによって構成される外測度を Lebesgue 外測度と呼び、 $\Gamma^{(N)}$ と書くことにする。また、 $\Gamma^{(N)}$ -可測であることを Lebesgue 可測であるといい、 $\Gamma^{(N)}$ -可測集合を Lebesgue 可測集合という。

さらに、定理 4.1 を外測度 $\Gamma^{(N)}$ に適用することにより得られる測度を Lebesgue 測度と呼び、 $\mu^{(N)}$ と書くことにする。

Lebesgue 可測な集合として最も有名なものが、Borel 集合です。

定義 11. Euclid 空間 $X = \mathbb{R}^N$ の (通常位相での) 開集合全体を \mathfrak{O}_N とするとき、 $\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]$ を X の Borel 集合族と呼び、 \mathfrak{B}_N と書く。Borel 集合族の元となっている X の部分集合を Borel 集合と呼ぶ。

定義から明らかなように、 \mathbb{R}^N の開集合はすべて Borel 集合です。とくに、空集合 ϕ や \mathbb{R}^N 自身は Borel 集合です。

定理 6.4. $\mathfrak{B}_N = \mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N]$.

定理 6.5. Borel 集合はすべて Lebesgue 可測である。

7 ほとんど至るところで

X を空間、 \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族とし、 μ を \mathfrak{B} 上定義された X の測度とします。

定義 12. 集合 $E \in \mathfrak{B}$ が零集合であるとは、 $\mu(E) = 0$ が成り立つときにいう。

例 7.1. 空集合は零集合である。

例 7.2. Euclid 空間 \mathbb{R}^N の Lebesgue 可測な可算部分集合はすべて零集合である。

例 7.3. \mathbb{R} の上の Lebesgue 測度に関して、連続体の濃度をもつ零集合の例として「Cantor 集合」と呼ばれるものがある。

定義 13. 集合 $E \in \mathfrak{B}$ の点 x に関する命題を $P(x)$ とする. 命題 $P(x)$ が μ に関して E 上ほとんど至るところで成立する, あるいは, ほとんどすべての $x \in E$ で成立するとは, 次の二つの条件を満たすような E の部分集合 E_0 が存在するときという:

- (i) E_0 は零集合である. すなわち, $\mu(E_0) = 0$.
- (ii) 命題 $P(x)$ がすべての点 $x \in E \setminus E_0$ で成立する.

命題 $P(x)$ が E 上ほとんど至るところで成立することを, 記号で

$$P(x) \quad (\text{a.e. } x \in E)$$

のように書く. a.e. は almost every の略である.

例 7.4. Euclid 空間 \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度 $\mu^{(1)}$ を考えると, 有理数全体からなる集合 \mathbb{Q} は可算集合だから, $\mu^{(1)}(\mathbb{Q}) = 0$ である. いま, \mathbb{R} 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

によって定義する. このとき, $f(x)$ は \mathbb{R} 上ほとんど至るところで 0 である」ということができる. このことを記号で書くと

$$f(x) = 0 \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R})$$

となる.

8 測度空間の完備化

X を空間, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族, μ を \mathfrak{B} 上定義された X の測度とします.

定義 14 (完備). 測度空間 (X, \mathfrak{B}, μ) が完備であるとは, 条件

$$B \in \mathfrak{B}, \mu(B) = 0, A \subseteq B \implies A \in \mathfrak{B}$$

が成り立つときにいう.

つまり, 測度空間が完備であるとは, 零集合の部分集合もまた零集合になるということです.

定義 15 (完備化). 測度空間 $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ が (X, \mathfrak{B}, μ) の完備化であるとは, 次の四つの条件が成り立つときにいう:

- (i) $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ は完備である,
- (ii) $\mathfrak{B} \subseteq \overline{\mathfrak{B}}$,
- (iii) $\overline{\mu}(A) = \mu(A) \quad (\forall A \in \mathfrak{B})$,
- (iv) 任意の $E \in \overline{\mathfrak{B}}$ に対して, ある $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ が存在して

$$B_1 \subseteq E \subseteq B_2, \quad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0$$

が成り立つ.

定理 8.1. 任意の測度空間に対して, その完備化がただ一つ存在する.

9 確率測度

X を空間とし, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族, μ を \mathfrak{B} 上定義された集合関数とします.

確率論では, 空間 X のことを見本空間, \mathfrak{B} の元を事象と呼びます. また, 事象 $A \in \mathfrak{B}$ に対して, 値 $\mu(A)$ を, 事象 A の起こる確率と呼びます.

定義 16 (確率測度). μ が次の二つの条件を満たすとき, μ を確率測度と呼ぶ:

- (i) $0 \leq \mu(A) \leq 1, \mu(\phi) = 0, \mu(X) = 1,$
- (ii) $A_n \in \mathfrak{B} (n = 1, 2, \dots)$ とし, $j \neq k$ ならば $A_j \cap A_k = \phi$ であるとする. このとき,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つ (完全加法性).

確率測度は実際に測度の定義を満たします. μ が確率測度であるとき, 測度空間 (X, \mathfrak{B}, μ) を確率空間と呼びます.

定理 4.1 において, とくに外測度 Γ が条件 $\Gamma(X) = 1$ を満たすとき, Γ を \mathfrak{M}_Γ に制限したものは確率測度になります. そのことを改めて定理として述べておきます.

定理 9.1 (Carathéodory の定理). X を空間, Γ を X の外測度とし, \mathfrak{M}_Γ を Γ -可測集合の全体とする.

- (i) \mathfrak{M}_Γ は加法族である.
- (ii) Γ の \mathfrak{M}_Γ への制限は \mathfrak{M}_Γ 上定義された X の測度である.
- (iii) 特に, $\Gamma(X) = 1$ のとき, Γ の \mathfrak{M}_Γ への制限は確率測度である.

10 Haar 測度

X を空間, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族, μ を \mathfrak{B} 上定義された X の測度とします. また, G を群とし, G は X に作用していて, 条件

$$A \in \mathfrak{B}, \sigma \in G \implies \sigma A \in \mathfrak{B}$$

が成り立っているとします.

定義 17 (Haar 測度). 測度 μ が群 G に関して不変であるとは, 任意の $A \in \mathfrak{B}$ と任意の $\sigma \in G$ に対して $\mu(\sigma^{-1}A) = \mu(A)$ が成り立つときにいう.

とくに, G が局所コンパクト群¹であるとし, $X = G$ であるとする. さらに, G の X への作用が G における演算で定まっているとする. このとき G に関して不変な X の測度を G の Haar 測度と呼ぶ.

定理 10.1 (Haar 測度の一意性). 局所コンパクト群 G に対して, G の Haar 測度は正の実数倍を除いてただ一つ存在する.

例 10.2. Euclid 空間 \mathbb{R}^N を加法群とみたとき, \mathbb{R}^N は通常の位相に関して局所コンパクト群になる. \mathbb{R}^N の Haar 測度は Lebesgue 測度に一致する.

¹Hausdorff 空間であって, かつ局所コンパクトであるような位相群のことを局所コンパクト群といいます.

11 可測関数

X を空間とし, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族とします. この節では, $E \in \mathfrak{B}$ を固定します.

定理 11.1. 関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ について, 次の四つの条件は同値である:

- (i) $\{x \in E \mid f(x) > a\} \in \mathfrak{B} \quad (\forall a \in \mathbb{R}),$
- (ii) $\{x \in E \mid f(x) \geq a\} \in \mathfrak{B} \quad (\forall a \in \mathbb{R}),$
- (iii) $\{x \in E \mid f(x) < a\} \in \mathfrak{B} \quad (\forall a \in \mathbb{R}),$
- (iv) $\{x \in E \mid f(x) \leq a\} \in \mathfrak{B} \quad (\forall a \in \mathbb{R}).$

定義 18 (可測関数). 関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が定理 11.1 における条件 (i) ~ (iv) のうちいずれか一つを満たすとき, f は E 上 \mathfrak{B} -可測であるという. あるいは, f を E 上定義された \mathfrak{B} -可測関数と呼ぶ. 混乱の恐れがなければ, \mathfrak{B} や E を省略して f は可測であるということもある. また, f を単に可測関数と呼ぶこともある.

定義 19. 関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が与えられたとき, $x \in E$ に対して

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおくことによって E 上の関数 f^+ , f^- を定義する.

任意の $x \in E$ に対して

$$f^+(x) \geq 0, \quad f^-(x) \geq 0, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

であることは容易にわかります.

命題 11.2. f が E 上 \mathfrak{B} -可測である $\iff f^+$, f^- がともに E 上 \mathfrak{B} 可測である.

上の命題により, 一般の可測関数に関する議論は, 負の値をとらない可測関数に帰着します.

定理 11.3. f が可測関数ならば, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $|f|^\alpha$ も可測関数である. ただし, $\alpha < 0$ のとき, $f(x) = 0$ となる点 $x \in E$ においては $|f(x)|^\alpha = \infty$ であるとする.

定理 11.4. 可測関数 f, g が有限な実数値のみをとるとする. このとき,

- (i) 和 $f + g$ も可測関数である,
- (ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, αf も可測関数である,
- (iii) 積 fg も可測関数である.

定理 11.5. $\{f_n(x)\}$ を可測関数の列とする. このとき,

- (i) $\sup f_n(x)$ は可測関数である,
- (ii) $\inf f_n(x)$ は可測関数である,
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は可測関数である,
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は可測関数である.

とくに, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在すれば, $f(x)$ は可測である.

定理 11.6 (Egorov の定理). $E \in \mathfrak{B}$, $\mu(E) < \infty$ とする. また, $\{f_n(x)\}$ は E 上ほとんど至るところで有限な値をとる可測関数の列であって, ほとんどすべての点 $x \in E$ で有限な $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在すると仮定する.

このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $F \in \mathfrak{B}$ が存在して, 三つの条件

- (i) $F \subseteq E$,
- (ii) $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$,
- (iii) $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に F 上一様収束する

が成り立つ.

12 Lebesgue 可測関数と Borel 可測関数

この節では, $X = \mathbb{R}^N$ とし, μ を X の Lebesgue 測度, \mathfrak{M} を Lebesgue 可測集合の全体, \mathfrak{B}_N を Borel 集合の全体とします. \mathfrak{M} も \mathfrak{B}_N も加法族であり, $\mathfrak{B}_N \subseteq \mathfrak{M}$ が成り立ちます.

定理 12.1. 測度空間 (X, \mathfrak{M}, μ) は測度空間 (X, \mathfrak{B}_N, μ) の完備化である.

定義 20 (Lebesgue 可測). Lebesgue 可測集合の上で定義された関数 f が \mathfrak{M} -可測であるとき, f は Lebesgue 可測である, あるいは略して L-可測であるという.

定義 21 (Borel 可測). Borel 集合の上で定義された関数 f が \mathfrak{B}_N -可測であるとき, f を Borel 可測である, あるいは略して B-可測であるという.

定理 12.2 (Lusin の定理). $E \in \mathfrak{M}$ とし, $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を Lebesgue 可測関数とする. このとき, 任意の ε に対して, E のある部分集合 F が存在して,

- (i) F は X の閉集合である,
- (ii) $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$,
- (iii) f は F 上で連続である

が成り立つ.

13 単関数

定義 22 (定義関数). 集合 A に対して,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

によって定義される A 上の関数 χ_A を A の定義関数という.

命題 13.1. X を空間とし, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族とする. X の部分集合 A について

$$\chi_A \text{ が } \mathfrak{B}\text{-可測関数} \iff A \in \mathfrak{B}$$

が成り立つ.

定義 23 (単関数). X を空間とし, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族とする. また, $E \in \mathfrak{B}$ とし, $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を E 上定義された関数とする.

f が単関数であるとは, f に対して, 次の三つの条件を満たすような有限個の $E_i \in \mathfrak{B}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($1 \leq i \leq n$) が存在するときという:

- (i) $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ (直和),
- (ii) $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$,
- (iii) $f = \alpha_1 \chi_{E_1} + \alpha_2 \chi_{E_2} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n}$.

単関数のことを階段関数と呼ぶこともあります.

注意 13.2. 単関数 f に対して, $E_i \in \mathfrak{B}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($1 \leq i \leq n$) の取り方は必ずしも一意的ではない.

命題 13.3. 単関数は可測関数である.

命題 13.4. 次の二つの条件は同値である:

- (i) f は単関数である.
- (ii) f は有限個の値 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ のみをとる可測関数である.

定理 13.5. X を空間とし, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族, $E \in \mathfrak{B}$ とする. f が E 上定義された可測関数で, 負でない値のみをとるものとする. このとき, E 上定義された, 負でない値のみをとる単関数の単調増加列 $\{f_n\}$ で, f に E の各点で収束するものが存在する.

14 積分の定義

X を空間, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族, μ を \mathfrak{B} 上定義された X の測度とします. この節では, 集合 $E \in \mathfrak{B}$ と E 上定義された \mathfrak{B} -可測関数 f を固定します.

以下, 三段階に分けて, 測度 μ による E 上の f の積分 $\int_E f d\mu$ を定義していきます.

14.1 f が負の値をとらない単関数である場合

まず, f が負の値をとらない単関数である場合を考えます. いま, f に対して, $E_i \in \mathfrak{B}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($1 \leq i \leq n$) が存在して,

- (i) $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ (直和),
- (ii) $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$,
- (iii) $f = \alpha_1 \chi_{E_1} + \alpha_2 \chi_{E_2} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n}$.

が成り立っているとします. このような f に対して

$$\int_E f d\mu = \alpha_1 \mu(E_1) + \alpha_2 \mu(E_2) + \cdots + \alpha_n \mu(E_n)$$

と定義します. この定義は $E_i \in \mathfrak{B}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($1 \leq i \leq n$) の選び方には依存しません.

14.2 f が負の値をとらない場合

次に, f が負の値をとらない場合を考えます. ここで, f は必ずしも単関数ではないとします. 定理 13.5 より, 負の値をとらない単関数の単調増加列 $\{f_n\}$ で, f に収束するものが存在します. このとき

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

と定義します. 右辺の極限值は $\{f_n\}$ の取り方には関係しません.

14.3 一般の可測関数の場合

関数 f に対して, $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$ なので, 命題 11.2 より, 積分 $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ が定義できます. これらのうち少なくとも一方が有限であるとき,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

と定義します.

$\int_E f d\mu$ が有限のとき, すなわち $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ の両方が有限のとき, f は測度 μ について E 上積分可能あるいは可積分であるといえます.

15 積分の性質

X を空間, \mathfrak{B} を X の部分集合からなる加法族, μ を \mathfrak{B} 上定義された X の測度とします. この節で登場する集合はすべて \mathfrak{B} に属するものとし, また, 関数はすべて \mathfrak{B} 可測であるとします.

命題 15.1. f が E 上積分可能ならば,

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in E \mid f(x) = \infty\}) &= 0, \\ \mu(\{x \in E \mid f(x) = -\infty\}) &= 0, \\ \mu(\{x \in E \mid f(x) = a\}) &< \infty \quad (\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0)\end{aligned}$$

である.

命題 15.2. 関数 f がすべての $x \in E$ において $f(x) = 0$ ならば,

$$\int_E f d\mu = 0$$

が成り立つ.

命題 15.3. E が零集合, すなわち $\mu(E) = 0$ ならば, 任意の関数 f に対して

$$\int_E f d\mu = 0$$

が成り立つ.

命題 15.4. f を E 上定義された負の値をとらない関数とする. このとき, $\int_E f d\mu = 0$ ならば, ほとんどすべての $x \in E$ に対して $f(x) = 0$ が成り立つ.

命題 15.5. f, g を E 上定義された関数とし, 任意の $x \in E$ に対して $0 \leq f(x) \leq g(x)$ であるとする. このとき

$$0 \leq \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$

が成り立つ.

命題 15.6. f, g を E 上定義された関数とし, 任意の $x \in E$ に対して $|f(x)| \leq g(x)$ であるとする. このとき, g が積分可能ならば, f も積分可能である.

命題 15.7. f が E 上積分可能であるとする. このとき

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

が成り立つ.

命題 15.8 (線型性). f, g が E 上積分可能であるとする. このとき, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha f + \beta g$ も E 上積分可能であって

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

が成り立つ.

命題 15.9 (加法性). $E = A \cup B$, $A \cap B = \phi$ とし, f は A, B それぞれの上で積分可能であるとする. このとき, f は E 上積分可能であって

$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

が成り立つ.

命題 15.10. f, g を E 上定義された関数とし, E 上ほとんど至るところで一致するものとする. このとき, f が E 上積分可能ならば, g も E 上積分可能であって

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

が成り立つ.

命題 15.11. f を集合 E の上で有界な関数とし, g を E 上積分可能な関数であるとする. このとき, 積 fg は E 上積分可能である.

定理 15.12 (平均値の定理). f を集合 E の上で有界な関数とする. また, g を E 上積分可能な関数で, 負の値をとらないものとする. このとき,

$$m = \inf_{x \in E} f(x), \quad M = \sup_{x \in E} f(x)$$

とおくと, ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(i) \quad m \leq c \leq M,$$

$$(ii) \quad \int_E fg d\mu = c \int_E g d\mu$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] 伊藤清三：ルベーク積分入門，裳華房 (1963)
- [2] 折原明夫：測度と積分，裳華房 (1997)
- [3] 吉田耕作：測度と積分，岩波書店 (1976)
- [4] 伊藤清：確率論，岩波書店 (1991)
- [5] 岩波数学辞典第 3 版，岩波書店 (1985)