算術平均・幾何平均・調和平均

MATHEMATICS.PDF

2012-10-28

目 次

1　算術平均と幾何平均

n を正の整数とする.

実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の**算術平均**とは,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1}$$

のことである. つまり, 算術平均とは, 通常の平均のことであり, **相加平均**とも呼ばれる.

正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の**幾何平均**とは,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{2}$$

のことである. 幾何平均は**相乗平均**とも呼ばれる.

[例 1.1] i 年目の利率を r_i とし, 元本を a とする. 複利[1]で計算すると, n 年後の元利合計は

$$a(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)$$

となる. このとき,

$$a(1+r)^n = a(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)$$

を満たすような r のことを, n 年間の 1 年あたりの平均複利という. 上の等式より,

$$1 + r = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)}.$$

幾何平均を定義どおり計算する以外に, 次のような計算方法もある：上の幾何平均 (2) を G とおくとき, 任意の実数 b ($b > 0$, $b \neq 1$) を底として

$$\log_b G = \frac{\log_b a_1 + \log_b a_2 + \cdots + \log_b a_n}{n}, \quad G = b^{\log_a G}$$

が成り立つ. これを利用し, 先に $\log_b G$ を計算したのち最後に $b^{\log_b G}$ を計算する.

[定理 1.2（算術平均と幾何平均の関係）] n を正の整数, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の実数とするとき,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{3}$$

等号が成り立つのは, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき, またそのときに限る.

[証明] n に関する数学的帰納法により証明する.

$n = 1$ のときは明らかである.

$n = 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 &= \frac{(a_1 + a_2)^2 - 4a_1 a_2}{4} \\
&= \frac{(a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) - 4a_1 a_2}{4} \\
&= \frac{a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2}{4} \\
&= \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} \geq 0. \qquad (4)
\end{aligned}$$

[1] 複利計算とは, 利子の計算方法であって, 前期の利息を元本に加算して次期の利息を計算する.

a_1, a_2 は正の実数なので, $\sqrt{a_1a_2}$ もまた正の実数であり,

$$\begin{aligned}0 &\le \left(\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\sqrt{a_1a_2}\right),\\ 0 &< \frac{a_1+a_2}{2}+\sqrt{a_1a_2}.\end{aligned}$$

ゆえに, $(a_1+a_2)/2-\sqrt{a_1a_2}\ge 0$ が成り立ち, 不等式 (3) の $n=2$ の場合が得られる.

もし不等式 (3) において等号が成り立てば, (4) の $\ge$ のところで $=$ が成り立つ. よって, $a_1=a_2$ が得られる. 逆に, この条件が成り立つと不等式 (3) において等号が成り立つことは明らかである.

以上より, $n=2$ のときが証明された.

一般の n について証明するために, $n-1$ 以下のすべての正の整数に対して定理が成り立つと仮定する.

$n-1$ より大きい偶数のうちで最小のものを m とし, $m'=m/2$ とおく. $n>2$ のとき $m'\le n-1$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} &= \frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{m'}}{m'}+\dfrac{a_{m'+1}+a_{m'+2}+\cdots+a_{2m'}}{m'}}{2}\\ &\ge \sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{m'}}{m'}+\frac{a_{m'+1}+a_{m'+2}+\cdots+a_{2m'}}{m'}} &(5)\\ &\ge \sqrt{\sqrt[m']{a_1a_2\cdots a_{m'}}\ \sqrt[m']{a_{m'+1}a_{m'+2}\cdots a_{2m'}}} &(6)\\ &= \sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}.\end{aligned}$$

等号が成り立つのは, (5), (6) の $\ge$ がともに $=$ のとき, すなわち

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{m'}}{m'}=\frac{a_{m'+1}+a_{m'+2}+\cdots+a_{2m'}}{m'},$$

$$a_1=a_2=\cdots=a_{m'},\quad a_{m'+1}=a_{m'+2}=\cdots=a_{2m'}$$

がすべて成り立つときである. これは, $a_1=a_2=\cdots=a_m$ と同値である. したがって, 帰納法の仮定のもとで, m について定理は成り立つ.

n が偶数のとき, $m=n$ である. この場合の証明はすでに完了している.

n が奇数のとき, $m=n+1$ である. $a_{n+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ とおくと, $a_{n+1}>0$ であり,

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\\ &\Leftrightarrow \frac{na_{n+1}+a_{n+1}}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\\ &\Leftrightarrow a_{n+1}\ge\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\Leftrightarrow a_{n+1}^{n+1}\ge a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\\ &\Leftrightarrow a_{n+1}^n\ge a_1a_2\cdots a_n\Leftrightarrow a_{n+1}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\\ &\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.\end{aligned}$$

ゆえに, 帰納法の仮定のもとで, n が奇数の場合にも不等式 (3) が成り立つ. また, 等号が成り立つための必要十分条件は

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

であり, これは $a_1=a_2=\cdots=a_n$ と同値である.

以上より, すべての正の整数 n について定理が証明された. □

[別証] n に関する数学的帰納法によって証明する.

$n = 1$ のときは明らかである.

$n = k$ のとき定理の主張が成り立つと仮定し, $n = k+1$ のときを考える. まず, 不等式 (3) の対称性により, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k+1}$ と仮定しても一般性を失わない. 次に,

$$f(x) = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + x}{k+1}\right)^{k+1} - a_1 a_2 \cdots a_k x$$

とおく. 定理を証明するためには, $f(a_{k+1}) \geq 0$ を示し, $f(a_{k+1}) = 0$ となるための必要十分条件が $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$ であることを示せばよい. $f(x)$ を x について微分すれば,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (k+1)\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + x}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1} - a_1 a_2 \cdots a_k \\ &= \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + x}{k+1}\right)^k - a_1 a_2 \cdots a_k. \end{aligned}$$

さらに微分すると,

$$f''(x) = \frac{k}{k+1}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + x}{k+1}\right)^{k-1}.$$

$f'(x)$ は区間 $[0, \infty)$ において単調増加である. 実際, $k = 1$ のとき, $f''(x) = 1/2 > 0$ である. また, $k > 1$ のとき, $x \geq 0$ ならば, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + x > 0$ なので, $f''(x) > 0$.

$b_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)/k$ とおくと, 帰納法の仮定から $b_k \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$. また,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b_k}{k+1} = \frac{k b_k + b_k}{k+1} = b_k.$$

よって,

$$f'(b_k) = b_k^k - a_1 a_2 \cdots a_k \geq 0. \tag{7}$$

$b_k > 0$ であり, 区間 $[0, \infty)$ において $f'(x)$ は単調増加だから, 区間 $[b_k, \infty)$ において $f'(x) \geq 0$ が成り立つ. さらに,

$$f(b_k) = b_k^{k+1} - a_1 a_2 \cdots a_k b_k = f'(b_k) \cdot b_k \geq 0. \tag{8}$$

したがって, $x \geq b_k$ なるすべての実数 x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つ. 一方, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k+1}$ と仮定したから,

$$a_{k+1} = \frac{k a_{k+1}}{k} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = b_k.$$

ゆえに, $f(a_{k+1}) \geq 0$. これより, $n = k+1$ の場合の不等式 (3) が得られる.

$f(a_{k+1}) = 0$ が成り立つとする. $a_{k+1} \in [b_k, \infty)$ であり, 区間 (b_k, ∞) においては $f'(x) > 0$ かつ $f(x) > 0$ だから,

$$a_{k+1} = b_k, \quad f(b_k) = 0 \tag{9}$$

でなければならない. (9) の 2 番目の条件と (8) の等式と $b_k > 0$ から, $f'(b_k) = 0$. これと (7) の等式と帰納法の仮定から, $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$. さらに, (9) の 1 番目の条件により, $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ が得られる. 逆に, この条件が成り立つとき $f(a_{k+1}) = 0$ となることは明らかである.

以上より, すべての正の整数 n について定理が証明された. □

[注意 1.3] 上の定理は, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ を負でない実数としても成立する. 実際, $a_1,\ a_2,\ \ldots,$ a_n の中に 0 となるものが存在すれば, それらの幾何平均は 0 になるから, 不等式は明らかに成り立つ. 等号が成り立つためには, 算術平均のほうも 0 でなければならないが, そうなるのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ のときだけである.

[注意 1.4] 上の定理は, 相加・相乗平均の関係とも呼ばれる. むしろ, その呼び方のほうが普及しているかもしれない.

2 調和平均

正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の**調和平均**とは, 各 a_i の逆数 $1/a_i$ について算術平均をとったものの逆数, すなわち

$$\frac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}$$

のことである.

[例 2.1] 距離 d [km] の 2 地点の間を, 行きは速さ a [km/h], 帰りは速さ b [km/h] で往復したときの平均の速さは, 2 つの速さの調和平均である.

「距離 = 速さ × 時間」の関係を思い出すと,

$$\text{平均の速さ} = \text{トータル距離} \ / \ \text{トータル時間}$$

であり, トータル距離は $2d$ [km], トータル時間は $d/a + d/b$ [h] だから,

$$\text{平均の速さ} = \frac{2d}{\dfrac{d}{a}+\dfrac{d}{b}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)} \ \text{[km/h]}.$$

もっと一般に, 2 つの地点 A, B の間を n 個の等間隔の区間に分け, 1 つの区間の距離を d [km] とする. A から出発し, それぞれの区間を速さ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [km/h] で通過して B に到着したとき, その平均の速さは各々の区間における速さの調和平均である.

実際, トータル距離は nd [km], トータル時間は $d/a_1 + d/a_2 + \cdots + d/a_n$ [h] だから,

$$\text{平均の速さ} = \frac{nd}{\dfrac{d}{a_1}+\dfrac{d}{a_2}+\cdots+\dfrac{d}{a_n}} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)} \ \text{[km/h]}.$$

[例 2.2] 株式投資でのドルコスト平均法[2)]による平均取得単価は調和平均である. 毎回の購入金額 m は一定なので, i 回目に購入するときの株価を p_i とすると購入株数は m/p_i となる.

$$\text{平均取得単価} = \text{トータルの購入金額} \ / \ \text{トータルの購入株数}$$

だから,

$$\text{平均取得単価} = \frac{nm}{\dfrac{m}{p_1}+\dfrac{m}{p_2}+\cdots+\dfrac{m}{p_n}} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_n}\right)}.$$

2) 一定の金額で購入し続ける投資方法.

［定理 2.3（幾何平均と調和平均の関係）］ n を正の整数, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の実数とするとき,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}.$$

等号が成り立つのは, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき, またそのときに限る.

［証明］ 各 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の逆数に対して定理 1.2 を適用すると,

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}. \tag{10}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ はすべて正だから, 式 (10) の両端の辺はともに正である. よって, 逆数をとると,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}. \tag{11}$$

さらに, 式 (10) において $\geq$ のところでそれぞれ $>$, $=$ が成り立っていれば, 式 (11) において $\geq$ のところはそれぞれ $>$, $=$ になる. ゆえに, 式 (11) において等号が成り立つのは, 式 (10) において等号が成り立つとき, またそのときに限る. 再び定理 1.2 より, 等号成立のための必要十分条件は $\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} = \cdots = \dfrac{1}{a_n}$ であり, これは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ と同値である. $\square$

最後に話をまとめると, 正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して, 一般に

$$\text{算術平均} \geq \text{幾何平均} \geq \text{調和平均}$$

が成り立つ. 両方の不等式において, 等号成立条件は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ である.